

Soluție

1.a) $B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = 2B.$

b) $A^2 = 2A \Rightarrow a^2 + bc = 2a; b(a+d) = 2b; c(a+d) = 2c; bc + d^2 = 2d.$ Dacă $b \neq 0 \Rightarrow a+d = 2$, contradicție. Deci $b = 0$. Analog $c = 0$. $a^2 = 2a, d^2 = 2d, a+d \neq 2 \Rightarrow A = O_2$ sau $A = 2I_2$.

c) $d = 2 - a; \det(A) = ad - bc = a(2 - a) - bc = 0.$

2.a) Aplicăm algoritmul lui Eucid. $x^6 - 1 = (x^4 - 1) \cdot x^2 + (x^2 - 1).$ $x^4 - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1),$ deci $(f, g) = x^2 - 1.$

b) 8 soluții distincte.

c) $f(x) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2 + 1)$